

Geometrija 3, jun 1, 27.05.2013.

Napomena. Studenti M, N smerova na pismenom ispitu radili su prvi, treći i peti zadatak. Studenti V, R, L smerova na ispitu su radili prvi zadatak (u slučaju prostorne krive, bez dela c)), drugi, treći zadatak (bez izometrije u delu b)) i četvrti zadatak.

1. Neka je α regularna ravanska kriva. Slika krive β sastoji od tačaka koje su na rastojanju d od odgovarajućih tačaka slike krive α duž normala krive α .

- (a) Ispitati regularnost krive β . Ako je kriva α zatvorena, dokazati da se može odabrati dovoljno malo d tako da je kriva β regularna.
- (b) Izraziti krivinu krive β preko krivine krive α i d .
- (c) Ako je kriva α elipsa, opisati krive β za različite vrednosti d i skicirati ih.

Rešenje. Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva. Zbog toga možemo bez umanjavanja opštosti pretpostaviti da je kriva α parametrizovana prirodnim parametrom. Tada je kriva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ data sa

$$\beta(s) = \alpha(s) + dN(s).$$

Kako je

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + dN'(s) = (1 - d\kappa(s))T(s)$$

$$\|\beta'(s)\| = |1 - d\kappa(s)|,$$

kriva je regularna u onim tačkama $s \in I$ u kojima je $\kappa(s) \neq \frac{1}{d}$. Ako je kriva α zatvorena, možemo uzeti $I = [a, b]$ i $\alpha(a) = \alpha(b)$. Kako je skup I kompaktan, neprekidna funkcija κ dostiže svoj minimum i maksimum na I . Neka je $|\kappa(s)| \leq K$ za sve $s \in [a, b]$. Tada je dovoljno odabrati $d < \frac{1}{K}$, recimo $d = \frac{1}{2K}$.

U slučaju da je kriva α prostorna kriva, dobija se

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + dN'(s) = (1 - d\kappa(s))T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$\|\beta'(s)\| = \sqrt{(1 - d\kappa(s))^2 + \tau^2(s)},$$

pa kriva α nije regularna jedino u onim tačkama $s \in I$ u kojima je $\kappa(s) = \frac{1}{d}$ i $\tau(s) = 0$ (recimo ako je ravanska i $\kappa(s) = \frac{1}{d}$).

Krivina krive β može računati po formuli $\kappa_\beta = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3}$. Kako je

$$\beta' = (1 - d\kappa)T(s) + \tau B,$$

$$\beta'' = -d\kappa'T + (\kappa - d\kappa^2 - \tau\tau')N + \tau'B,$$

dobijamo

$$\beta' \times \beta'' = (\tau^2\tau' + d\kappa^2\tau - \kappa\tau)T + (d\kappa\tau' - d\kappa'\tau - \tau')N + (1 - d\kappa)(\kappa - d\kappa^2 - \tau\tau')B,$$

pa je krivina krive β

$$\kappa_\beta = \frac{\sqrt{(\tau^2\tau' + d\kappa^2\tau - \kappa\tau)^2 + (d\kappa\tau' - d\kappa'\tau - \tau')^2 + (1 - d\kappa)^2(\kappa - d\kappa^2 - \tau\tau')^2}}{\sqrt{((1 - d\kappa)^2 + \tau^2)^3}}.$$

Ako je kriva α (a samim tim i β) ravanska, imamo $\tau = 0$, pa je

$$\kappa_\beta = \frac{\kappa}{|1 - d\kappa|}.$$

Ako je kriva α elipsa data parametrizacijom $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (t nije prirodni parametar), njena normala i krivina date su sa

$$N(t) = \left(-\frac{b}{c} \cos t, -\frac{a}{c} \sin t \right),$$

$$\kappa = \frac{ab}{c^3}, \quad c = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Ovde je uzet smer normale tako da je Freneova baza $[T, N]$ pozitivno orijentisana, pa je samim tim dobijena krivina ujedno i označena. Parametrizacija krive β je

$$\beta(t) = \left(\left(a - \frac{db}{c} \right) \cos t, \left(b - \frac{da}{c} \right) \sin t \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Tačke u kojima kriva β nije regularna zadovoljavaju $d = \frac{c^3}{ab}$ i leže na krivoj parametrizovanoj sa

$$\gamma(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

koja zapravo predstavlja astroidu $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

Kriva β paralelna elipsi α na rastojanju $d > 0$ je elipsa za sve $d < \frac{a^2 - b^2}{a}$ i za sve $d > \frac{a^2 - b^2}{b}$, dok za ostale vrednosti parametra d ima neke od singulariteta - špičeve, samopreseke, tačke samododira itd. Za detalje i slike pogledati tekst i animaciju na stranici http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_curve.

2. Data je kriva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2 \cos t)$. Odrediti ugao između z -ose i rektifikacione ravni krive γ .

Rešenje. Rektifikaciona ravan krive γ je koordinatna ravan Freneovog repa razapeta vektorima tangente i binormale, pa joj je normalni vektor vektor N normale krive γ . Taj vektor se računa po formuli

$$N = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \times \gamma'}{\|\gamma'\| \cdot \|\gamma' \times \gamma''\|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}(-\cos t, -5\sin t, -2\cos t).$$

Vektor z -ose je $k = (0, 0, 1)$. Ugao φ između z -ose i rektifikacione ravni se dobija kao $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - \angle(N, k) \right|$.

$$\cos \angle(N, k) = \frac{\langle N, k \rangle}{\|N\| \cdot \|k\|} = \frac{-\cos t}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}$$

$$\sin \varphi = |\cos \angle(N, k)| = \frac{|\cos t|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{|\cos t|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}$$

3. Data je elementarna površ $r(u, v) = (u, \operatorname{ch} u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

- Skicirati datu površ i koordinatne linije. Izračunati glavne, Gausovu i srednju krivinu date površi.
- Dokazati da je data površ izometrična ravni. Odrediti krive (loksodrome) koje zaklapaju konstantan oštar ugao φ sa koordinatnim linijama $v = \operatorname{const}$.
- Dokazati da sve geodezijske linije na površi čine koordinatne linije, kao i krive date sa $v = A \operatorname{sh} u + B$, $A, B = \operatorname{const}$, $A \neq 0$.
- Odrediti sve asimptotske i glavne linije na datoj površi.

Rešenje. Kako je $r(u, v) = (u, \operatorname{ch} u, 0) + v(0, 0, 1)$, data površ je linijska površ i predstavlja cilindar nad osnovom koja je lančanica $y = \operatorname{ch} x$ u xy -ravni, sa direktrisama paralelnim z -osi.

Koordinatne linije

u -parametarske krive $v = v_0 = \operatorname{const}$ su lančanice u ravnima paralelnim xy -ravni, date sa $(u, \operatorname{ch} u, v_0)$, $u \in \mathbb{R}$.
 v -parametarske krive $u = u_0 = \operatorname{const}$ su prave paralelne z -osi, date sa $(u_0, \operatorname{ch} u_0, v)$, $v \in \mathbb{R}$.

$$r_u = (1, \operatorname{sh} u, 0) \quad r_v = (0, 0, 1)$$

$$r_{uu} = (0, \operatorname{ch} u, 0) \quad r_{uv} = r_{vv} = (0, 0, 0)$$

jedinična normala

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \left(\operatorname{th} u, -\frac{1}{\operatorname{ch} u}, 0 \right)$$

koeficijenti prve fundamentalne forme

$$E = \operatorname{ch}^2 u \quad F = 0 \quad G = 1$$

koeficijenti druge fundamentalne forme

$$e = -1 \quad f = g = 0$$

matrični zapis formi

$$I = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Glavne krivine date površi predstavljaju sopstvene vrednosti matrice

$$II \cdot I^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i iznose $\kappa_1 = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}$, $\kappa_2 = 0$. **Gausova krivina** površi iznosi

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0,$$

a **srednja krivina** iznosi

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{-1}{2\operatorname{ch}^2 u}.$$

Uspostavićemo izometriju između ravni $y = 0$ i date površi "savijajući" tu ravan na dati cilindar. Tačka sa koordinatama $(x, 0, z)$ slika se u tačku koja je na istoj visini z i na istom rastojanju x od z -ose, ali sada mereno duž lančanice $(u, \operatorname{ch} u, v)$. Zbog toga je

$$x = \int_0^u \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u,$$

pa je izometrija data sa

$$x = \operatorname{sh} u, \quad z = v.$$

Preciznije, ravan parametrizovana sa $(\operatorname{sh} u, 0, v)$ i data površ $(u, \operatorname{ch} u, v)$ imaju iste koeficijente prve fundamentalne forme i izometrične su. Kako izometrije, između ostalog, čuvaju i uglove, loksodrome na datoj površi dobijaju se kao slike krivih iz ravni koje zaklapaju konstantan oštar ugao φ sa pravama $z = \operatorname{const}$ u ravni $y = 0$, a to su prave $z = \operatorname{tg} \varphi \cdot x + C$, $C = \operatorname{const}$. Jednačina traženih loksodroma je

$$v = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{sh} u + C, \quad C = \operatorname{const}.$$

Naravno, isti rezultat dobio bi se i računskim putem, slično kao u zadatku 2.8 a) sa vežbi (loksodrome na sferi). Geodezijske linije čuvaju se pri izometrijama, pa su geodezijske na datoj površi slike pravih (geodezijskih) iz ravni $z = Ax + B$. Njihove jednačine su

$$v = A \operatorname{sh} u + B, \quad A, B = \operatorname{const}, \quad A \neq 0.$$

Ovde nedostaju slike pravih $x = \operatorname{const}$ i $z = \operatorname{const}$, a to su upravo koordinatne linije na datoj površi koje takođe jesu geodezijske. Opet, isti rezultat dobija se i primenjujući proceduru opisanu na vežbama, u rešenju zadatka 2.20 c).

kako je $F = f = 0$ i kako nema umbiličkih tačaka na datoj površi, jedine glavne linije na datoj površi su koordinatne linije.

Jednačina asimptotskih linija svodi se na $-u'^2 = 0$, odakle je $u = \operatorname{const}$. Jedine asimptotske linije na datoj površi su v -koordinatne linije (koje su prave).

4. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $B(\frac{9}{8}, \frac{3\sqrt{7}}{8})$, $C(2, \frac{\sqrt{7}}{2})$ i $D(2, \frac{5}{2})$. Odrediti tačku A tako da je četvorougao $ABCD$ Lambertov sa oštrim uglom u tački A i izračunati taj ugao. Odrediti središte duži CD .

Rešenje. Jednačina prave CD je $u = 2$. Prava BC je deo euklidskog kruga. Kako je ugao kod temena C prav, centar tog kruga mora pripadati (euklidskoj) pravoj BC (i naravno u -osi), pa je u pitanju (polu)krug

$$(u - 2)^2 + v^2 = \frac{7}{4}, \quad v > 0.$$

Analogno, jednačina hiperboličke prave AD je zapravo jednačina euklidskog polukruga

$$(u-2)^2 + v^2 = \frac{25}{4}, \quad v > 0.$$

Ostaje da odredimo jednačinu prave AB . Prava AB je u euklidskom smislu polukrug koji mora biti normalan na polukrug određen pravom BC , zbog pravog ugla u temenu B . To znači da odgovarajući poluprečnici koji sadrže tačku B moraju biti normalni međusobno. Ako su $(c, 0)$ euklidske koordinate centra polukruga AB , koristeći sličnosti trouglova (ili Pitagorinu teoremu ili nekako drugačije) dobijamo

$$\frac{\frac{9}{8} - c}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{8}}{2 - \frac{9}{8}},$$

odakle je $c = 0$. Prema tome, jednačina prave AB je

$$u^2 + v^2 = \frac{9}{4}, \quad v > 0.$$

Koordinate temena A dobijamo u preseku pravih AB i AD i iznose $A(0, \frac{3}{2})$, tj. tačka A se nalazi na v -osi.

Ugao kod temena A četvorougla $ABCD$ možemo računati i kao euklidski ugao između poluprečnika krugova AD i AB koji sadrže teme A . Taj ugao je ugao pravouglog trougla čije su katete $\frac{3}{2}$ i 2 , naspram katete 2 , pa je njegov mera $\arctg \frac{4}{3}$.

Središte E duži CD ima koordinate $(2, t_0)$ i zadovoljava

$$\|CE\| = \int_{\frac{\sqrt{7}}{2}}^{t_0} \frac{1}{t} dt = \int_{t_0}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t} dt = \|DE\|.$$

Odavde je $2 \ln t_0 = \ln \frac{5}{\sqrt{7}}$, pa je $t_0 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$. Središte duži CD je tačka $E(2, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}})$.

5. Data je regularna površ čija je srednja krivina jednaka nuli (minimalna površ), a Gausova krivina različita od nule u svim tačkama.

- Dokazati da u svakoj tački P date površi postoje tačno dva asimptotska pravca, pri čemu oni zaklapaju ugao $\frac{\pi}{4}$ sa glavnim pravcima.
- Ako su v_P i w_P proizvoljna dva normalna jedinična tangentna vektora date površi u tački P , dokazati da važi $\text{II}(v_P, v_P) = -\text{II}(w_P, w_P)$.
- Dokazati da definicija minimalne površi ne zavisi od parametrizacije, iako srednja krivina zavisi.

Rešenje. Neka su κ_1 i κ_2 glavne krivine date površi u proizvoljnoj tački P , a e_1 i e_2 odgovarajući jedinični glavni pravci. Iz datih uslova zaključujemo da je $\kappa_1 = -\kappa_2$, kao i da su obe glavne krivine različite od nule. Odatle sledi da su glavne krivine suprotnog znaka, pa su sve tačke ovakve površi hiperboličke. Neka proizvoljan pravac tangentne ravni zaklapa orijentisan ugao φ sa glavnim pravcem e_1 . Iz Ojlerove teoreme imamo da je normalna krivina površi duž tog pravca data formulom

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi.$$

Za asimptotski pravac važi $\kappa_n = 0$, odakle je

$$\text{tg}^2 \varphi = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 1.$$

Prema tome, $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$, što uz činjenicu da su glavni pravci međusobno normalni daje deo (a) zadatka.

Neka jedinični tangentni vektor v_P zaklapa orijentisan ugao θ sa e_1 . Tada w_P zaklapa ugao $\frac{\pi}{2} + \theta$ sa e_1 . Iz Ojlerove teoreme imamo da su normalne krivine duž pravaca v_P i w_P redom

$$\kappa_v = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta,$$

$$\kappa_w = \kappa_1 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + \kappa_2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta.$$

Tvrđenje (b) zadatka sledi iz činjenice da je $\text{II}(v_P, v_P) = \kappa_v$ i $\text{II}(w_P, w_P) = \kappa_w$, kao i $\kappa_1 = -\kappa_2$, $\kappa_v = -\kappa_w$.

Pri promeni parametrizacije površi, glavni pravci se menjaju, ali i dalje ostaju međusobno normalni tangentni vektori (možemo se ograničiti na jedinične). Normalna krivina površi duž fiksiranog pravca se pri promeni parametrizacije menja do na znak. Kako su glavne krivine zapravo normalne krivine površi duž glavnih pravaca, a srednja krivina je njihov poluzbir, tvrđenje (c) odmah sledi iz dela (b).